Ueber die Abhängigkeit

des durch

Hysteresis bedingten Effectverlustes

im Eisen

von der

Stärke der Magnetisirung.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der philosophischen Doctorwürde

einer

hohen philosophischen Fakultät

der

UNIVERSITÄT BASEL

vorgelegt von

HERMANN MAURACH

aus Stettin.

Druck von Gebr. Fretz, Zürich

1896.

Ueber die Abhängigkeit

des durch

Hysteresis bedingten Effectverlustes

im Eisen

von der

Stärke der Magnetisirung.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der philosophischen Doctorwürde

einer

hohen philosophischen Fakultät

der

UNIVERSITÄT BASEL

vorgelegt von

HERMANN MAURACH

aus Stettin.

Druck von Gebr. Fretz, Zürich

1896.

Meinem hochverehrten Lehrer

Herrn Professor Dr. H. F. Weber

in Dankbarkeit gewidmet.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548622_0015

Nachstehende Untersuchungen wurden im wissenschaftlichen Laboratorium des zum eidgenössischen Polytechnikum zu Zürich gehörigen physikalischen Instituts ausgeführt.

Es ist mir eine angenehme Pflicht, meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. H. F. WEBER, für den vielfachen Rath und die Unterstützung, welche er mir während der Ausführung der Arbeit zu Theil werden liess, meinen herzlichen Dank auszusprechen.

Die vorliegende Arbeit stellt sich zur Aufgabe zu untersuchen, ob die Abhängigkeit des durch Hysteresis bedingten Effektverlustes im Eisen von dem magnetischen Momente desselben mittelst der Steinmetz'schen Formel

$$V = y\, M_1^{1,6}$$

im ganzen Bereiche herstellbarer magnetisirender Kräfte dargestellt werden kann, oder ob der Exponent — er heisse x — einen, von der Grösse der magnetisirenden Kraft resp. des magnetischen Moments abhängigen Werth hat. Im vorstehenden Ausdrucke bezeichnet V den Effectverlust, y eine, vom Material abhängige Constante und M_1 das magnetische Moment der Volumeneinheit.

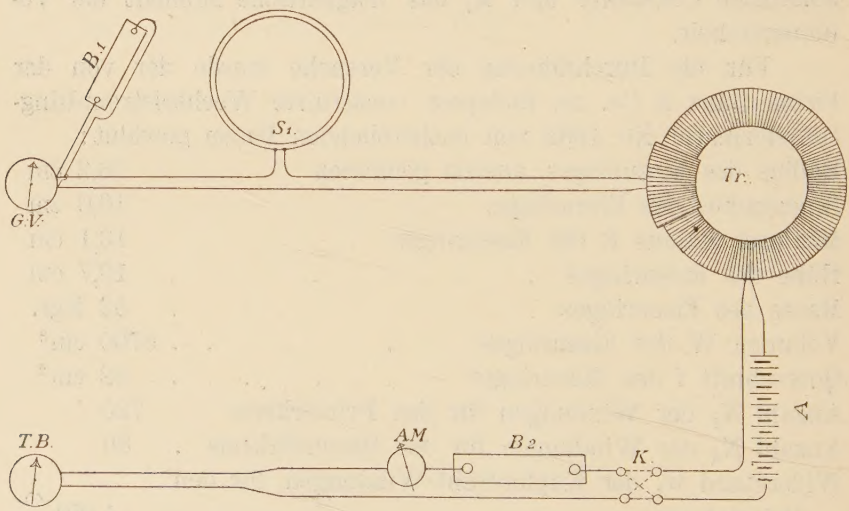
Für die Durchführung der Versuche wurde der von der Firma Ganz & Co. zu Budapest construirte Wechselstrom-Ringtransformator No. 1682 von nachstehenden Daten gewählt:

Radius des Eisenringes, aussen gemessen	16,2 cm
Innenradius des Eisenringes	10,0 cm
Mittlerer Radius R des Eisenringes	13,1 cm
Höhe des Eisenringes	13,7 cm
Masse des Eisenringes	52 Kgr.
Volumen W des Eisenringes	6700 cm^3
Querschnitt f des Eisenringes	82 cm^2
Anzahl N_1 der Windungen für den Primärkreis . .	720
Anzahl N_2 der Windungen für den Secundärkreis .	80
Widerstand w_1 der Kupferdraht-Windungen für den Primärkreis	1,901 $\sim$
Widerstand w_2 der Kupferdraht-Windungen für den Secundärkreis	0,028 $\sim$

Für die Durchführung der Versuche wurde die von Wilhelm Weber erfundene ballistische Methode gewählt. Bei dieser Methode

wird jede Aenderung des magnetischen Moments in dem zu untersuchenden Eisenkörper durch Messung des elektrischen Stromes bestimmt, der in der inducirten Drahtspule auftritt.

Aendert sich nämlich die Stärke des magnetischen Moments, so wird während der Dauer der Aenderung ein Strom erzeugt, dessen ganze Electricitätsmenge $\int_0^t j\,dt$ dieser Aenderung proportional ist. Der inducirte Strom wird durch ein ballistisches Galvanometer — ein Galvanometer, dessen Magnetnadel im Verhältniss zu der darauf einwirkenden Directionskraft ein beträchtliches Trägheitsmoment hat, so dass es langsam schwingt — gemessen. Liegt, wie beim Transformator der zu magnetisirende Eisenkörper in einer Magnetisirungsspule, so sind plötzliche Aenderungen seitens des Magnetismus dadurch hervorzubringen, dass man einen magnetisirenden Strom wirken lässt, ihn stufenweise steigert resp. vermindert, ihn öffnet resp. schliesst oder seine Richtung umkehrt. Nachstehende Figur zeigt die Versuchsanordnung, wie sie bei der Untersuchung des Ringtransformators



No. 1682 nach der ballistischen Methode von mir angewandt wurde. Der Ringtransformator Tr. ist mit seinen secundären Windungen, die hier als inducirende Stromwindungen Anwendung fanden, an die Accumulatoren-Batterie A angeschlossen. Zur Her-

stellung der zur Durchführung des magnetischen Kreisprozesses erforderlichen stufenartigen Aenderung der Stromstärke sind in diesem Stromkreise durch Einstecken oder Ziehen von Stöpseln regulirbare Rheostaten B_2 eingeschaltet. Auch konnte dieser inducirende Stromkreis durch den Schlüssel K beliebig geschlossen, unterbrochen oder umgekehrt werden. Zur vorläufigen angenäherten Bestimmung der im inducirenden Stromkreise jederzeit vorhandenen Stromstärke ist ein Ampèremeter A. M. angeschlossen, während die genaue inducirende Stromstärke i mit der Tangentenbussole T. B. gemäss der Gleichung:

$$i = \frac{10\,H\,(r^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}{2\,\pi\,r^2} \cdot [1 + \Theta] \cdot \operatorname{tg} x$$

ermittelt wurde.

In dem Ausdrucke für i bezeichnet:

H die horizontale Intensität des Erdmagnetismus,

r den Radius der in der Entfernung a von der Aufhängeaxe der Magnetnadel aufgestellten Drahtwindung,

Θ das Verhältniss der Torsionsconstanten zum Product aus M_1 und H, und

x den Ablenkungswinkel.

Die Correctionen wegen Deckglasdicke und Spiegelglasdicke der Bussole sind ihres geringen Betrages wegen vernachlässigt worden.

Das Galvanometer G. V. ist das ballistische Galvanometer, in dessen Schliessungskreis sich noch folgende Theile befinden:

1) die primären Windungen des Transformators, welche hier als Inductionsspule verwandt wurden. (diese Windungen sind in der Figur nur über einen Theil des Eisenringes angedeutet, während sie in Wirklichkeit sich über den ganzen Ring erstrecken),

2) die zur Aichung des Galvanometers G. V. miterforderliche Drahtspule S_1 und

3) der an das Galvanometer gelegte Nebenschluss B_1 von variablem Widerstande, welcher zur Herstellung der jedesmal erforderlichen Galvanometer-Empfindlichkeit diente.

Um die Form der Magnetisirungskurve zu bestimmen, beobachte ich den Ausschlag, den ein schwacher, mit der Tangentenbussole T. B. zu bestimmender Magnetisirungsstrom am Galvano-

meter G. V. zur Folge hat, verringere darauf den Widerstand in B_2 um einen gewissen Betrag und beobachte wieder den Ausschlag am Galvanometer. In dieser Weise wird die magnetische Wirkung jeder plötzlichen Aenderung des magnetisirenden Stromes durch den Ausschlag des Galvanometers G. V. gemessen. Der ganze, in irgend einem Stadium vorhandene Magnetismus ist also durch die Summe aller vorangegangenen Galvanometer-Ausschläge bestimmt. Nach demselben Verfahren ist die Wirkung einer einzelnen, wie die von zahlreichen Verkleinerungen zu messen, welche die Intensität des Magnetisirungsstromes erfährt und so die vollständige Magnetisirungscurve auf Grund dieser schrittweise vorgehenden Methode zu zeichnen, wo die magnetisirende Kraft stufenartig ansteigt, verschwindet und ihre Richtung wechselt.

Unter der Voraussetzung, dass die Magnetisirungsspule N_2 gleichförmig über den ganzen Eisenring gewickelt ist, sodass ihre Wirkung in jedem Querschnitte des Ringes dieselbe ist, und unter Einführung eines mittleren Radius R des Eisenringes ist der absolute Werth der magnetisirenden Kraft H des Eisenringes in einfacher Weise durch die Gleichung bestimmt:

$$H = \frac{4\,\pi\,N_2\,i}{2\,\pi\,R} = \frac{2\,N_2}{10\,R}\,.\,i^{amp.} = \frac{2.80}{131}\,.\,i^{amp.} = 1{,}22137\,i^{amp.}$$

d. h.: In unserem Falle wird der absolute Werth der magnetisirenden Kraft H des Eisenringes durch Multiplication des Werthes der Stromstärke in Ampère mit dem constanten Factor 1,22137 erhalten.

In dem vorstehenden Ausdrucke für H ist der mittlere Ringradius R eingeführt worden, weil die magnetisirende Kraft des Eisenringes an der Innenseite desselben am stärksten ist und gegen die Aussenseite des Ringes in demselben Verhältniss abnimmt, wie der Ringradius wächst. Es kommt dies daher, dass die Anzahl der Windungen pro Centimeter Länge auf der Innenseite des Ringes am grössten und auf der Aussenseite desselben am kleinsten ist.

Der absolute Werth des magnetischen Momentes pro Cubikcentimeter M_1 des Eisenringes bestimmt sich wie folgt: Bezeichnet man mit $e = j\,w_1{}^1$ die inducirte electromotorische Kraft, mit dt ein ∞ kleines Zeitintervall, sowie mit $M = M_1.W$ das magne-

tische Moment und mit l die mittlere Länge des Eisenringes, so erhält man als Ausdruck für die inducirte electromotorische Kraft e:

$$e = -\frac{d}{dt}\left[M \cdot \frac{4\pi N_1}{l}\right] = -\frac{d}{dt}\left[M_1 . W . \frac{4\pi N_1}{l}\right]$$

oder für das Eisenringvolumen W das Product aus Ringquerschnitt f und mittlerer Ringlänge l gesetzt, giebt:

$$e = jw_1{}^1 = -\frac{d}{dt}\left[M_1 . f . l . \frac{4\pi N_1}{l}\right] = -\frac{d}{dt}\left[M_1 . f . 4\pi N_1\right]$$

Vorstehende Gleichung zwischen den Zeitgrenzen t_1 und t_2 integrirt, liefert:

$$w_1{}^1 \int_{t_1}^{t_2} j\,dt = -4\pi N_1 . f . [M_1]_{t_1}^{t_2} \text{ oder}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} j\,dt = -\frac{1}{w_1{}^1} . 4\pi . N_1 . f \left[M_{1\,(t_2)} - M_{1\,(t_1)}\right]$$

oder da für den Moment t_2 die inducirte Stromstärke j den Werth Null hat, ist auch M_1 zur Zeit t_2 = Null, sodass resultirt:

$$\int_{t_1}^{t_2} j\,dt = \frac{1}{w_1{}^1} . 4\pi . N_1 . f . M_1$$

Die inducirte Electricitätsmenge $\int_{t_1}^{t_2} j\,dt$ wurde durch den Momentan-Ausschlag des Galvanometers G. V. gemäss der Beziehung gemessen:

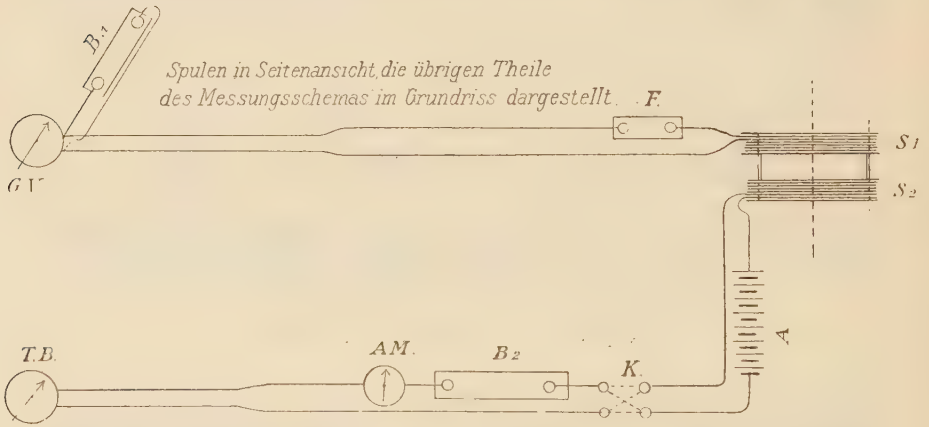
$$\int_{t_1}^{t_2} j\,dt = G . \sin\frac{u}{2}$$

In dem letzten Ausdrucke für $\int_{t_1}^{t_2} j\,dt$ bedeutet G eine, vom Galvanometer etc. abhängige constante Grösse und u den Ablenkungswinkel des Magneten des Galvanometers G. V.

Mit Bezug auf die vorstehende Gleichung ergiebt sich daher:

$$\int_{t_1}^{t_2} j\,dt = G . \sin\frac{u}{2} = \frac{4\pi . f . N_1 . M_1}{w_1{}^1}$$

Zur Eliminirung der in vorstehendem Ausdrucke ausser M_1 unbekannten Galvanometer-Constanten G wurde eine zweite Messung mit dem Spulenpaar S_1/S_2 vorgenommen, indem nach folgendem Messungsschema die eine Spule S_2 des Spulenpaares in den inducirenden Stromkreis, und in den inducirten Stromkreis ausser der zweiten Spule S_1 des Spulenpaares ein Widerstand F von derselben Grösse, wie der Widerstand der primären Windungen N_1 des Transformators Tr. eingeschaltet wurde. Die zweite Spule S_1 des Spulenpaares wurde in gewisser Distanz parallel zur ersten Spule gerichtet und in derselben verticalen Achsen-Richtung wie



jene, aufgestellt. Durch diese Anordnung war der Widerstand des inducirten Stromkreises in diesem Messungsschema von derselben Grösse wie im ersten Messungsschema. Bezeichne ich in diesem zweiten Messungsschema die durch Oeffnen des inducirenden Stromkreises im Inductionsstromkreise inducirte electromotorische Kraft mit e' so habe ich die Beziehung:

$$e' = j' \cdot w_1{}^1 = - Q \frac{dj'}{dt} - P \frac{di'}{dt}$$

oder geordnet:

$$j' w_1{}^1 + Q \frac{dj'}{dt} + P \frac{di'}{dt} = 0$$

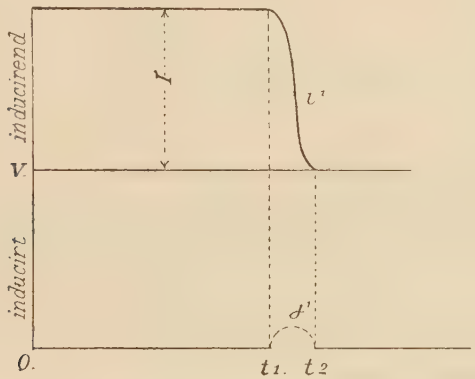
In vorstehender Gleichung bedeutet: Q das Selbstpotential der Spule im inducirten Stromkreise, P das gegenseitige Potential des Spulenpaares, i' die inducirende Stromstärke und j' die in-

ducirte Stromstärke. Die Integration vorstehender Differentialgleichung zwischen den Zeitgrenzen t_1 und t_2 liefert:

$$\int_{t_1}^{t_2} j' \, w_1{}^1 \, dt = - \int_{t_1}^{t_2} \left(P \frac{di'}{dt} \right) dt - \int_{t_1}^{t_2} \left(Q \frac{dj'}{dt} \right) dt$$

$$w^1_1 \int_{t_1}^{t_2} j' \, dt = - P \, [i']_{t_1}^{t_2} - Q \, [j']_{t_1}^{t_2}$$

Wie aus nachstehender Skizze hervorgeht, ist die inducirende



Stromstärke i' zur Zeit $t_1 = I$, während dieselbe zur Zeit t_2 den Werth Null hat. Die inducirte Stromstärke j' hat zur Zeit t_1 wie zur Zeit t_2 den Werth Null, daher hat auch das Glied $Q \left[j' \right]_{t_1}^{t_2}$ in vorstehender Gleichung den Werth Null, sodass resultirt:

$$w_1{}^1 \int_{t_1}^{t_2} j' \, dt = - P \left[i' \right]_{t_1}^{t_2} = - P \, [i'_{t_2} - i'_{t_1}] = + P . I$$

oder:

die inducirte Electricitätsmenge $\int_{t_1}^{t_2} j' \, dt = \frac{P . I}{w_1{}^1}$

Somit kann man setzen:

$$\int_{t_1}^{t_2} j' \, dt = G . \sin \frac{u'}{2} = \frac{P . I}{w_1{}^1}$$

Die Division dieser Gleichung und der Gleichung:

$$\int_{t_1}^{t_2} j\,dt = G \sin \frac{u}{2} = \frac{4\pi f \,.\, N \,.\, M_1}{w_1{}^1}$$

giebt:

$$\frac{G \sin \frac{u'}{2}}{G \sin \frac{u}{2}} = \frac{P \,.\, I \,.\, w^1{}_1}{4\pi f \,.\, N_1\, M_1\, w_1{}^1} = \frac{\sin \frac{u'}{2}}{\sin \frac{u}{2}} = \frac{P \,.\, I}{4\pi f \,.\, N_1\, M_1}$$

Daraus folgt:

$$M_1 = \frac{P \,.\, I}{4\pi f \,.\, N_1} \cdot \frac{\sin \frac{u}{2}}{\sin \frac{u'}{2}}$$

In dem vorstehenden Ausdrucke sind alle Grössen zur Bestimmung des absoluten Werthes des magnetischen Moments pro Volumeneinheit M_1 bekannt, da ausser den direct gegebenen Grössen f und N_1 sowie den durch Messung zu bestimmenden Werthen von I und u resp. u' der absolute Werth des gegenseitigen Potentials P des Spulenpaares S_1/S_2 durch Rechnung zu $0{,}477.10^8$ ermittelt wurde.

Um den magnetischen Kreisprozess durchzuführen, habe ich in jedem einzelnen Falle die magnetisirende Kraft H von dem Anfangswerthe H = Null bis zu einem positiven Maximum + H (m) ansteigen lassen, dann dieselbe wieder auf Null zurück- und unter Wechsel der Richtung bis zu einem negativen Maximum − H (m) fort-, demnächst wieder auf Null zurück- und endlich unter nochmaliger Richtungskehrung bis zu dem positiven Maximum + H (m) zurückgeführt. Auf diesem Wege erhält man zwei Magnetisirungscurven, von denen die eine den wachsenden, die andere den abnehmenden Werthen von der magnetisirenden Kraft H entspricht. Beide Magnetisirungscurven umschliessen eine bestimmte Fläche, deren Grösse $\int H \,.\, d\, M_1$ ein Maass für die Energievergeudung bildet, die während des Cyklus infolge der Hysteresis verbraucht wird. Zum Beweise hierfür denke man sich die Magnetisirung durch eine, vom Strome i durchflossene Magnetisirungsspule hervorgebracht, und berechne die Energie,

welche der Strom i bei Aenderung der Magnetisirung leistet. Der Kern des Solenoids bestehe in einem Eisenringe. Der Strom i sei als veränderlich vorausgesetzt, und zwar soll er in dem

1. Fall: als wachsend angenommen werden. Bei dem Wachsen des Stromes i wird in dem umgebenden Solenoid eine electromotorische Gegenkraft e in der, dem Strome i entgegengesetzten Richtung inducirt. Somit haben wir die Beziehung, wenn wir noch den Widerstand des magnetisirenden Stromkreises mit w_2^1 und die, den Strom i hervorrufende electromotorische Kraft mit E benennen:

$$i\, w_2^1 = E - e.$$

Für die inducirte electromotorische Kraft e können wir nach Früherem setzen:

$$e = \frac{d}{dt}\left[M \cdot 4\pi \frac{N}{l}\right]$$

sodass die vorstehende Gleichung die Form annimmt:

$$i\, w_2^1 = E - \frac{dM}{dt} \cdot \frac{4\pi\, N}{l}$$

Diese Gleichung mit der Stromstärke i multiplicirt, giebt:

$$i^2\, w_2^1 = E\, i - \frac{dM}{dt} \cdot \frac{4\pi\, N}{l} \cdot i$$

Ersetzen wir in vorstehender Gleichung die, den Werth der magnetisirenden Kraft H darstellende Grösse $\frac{4\pi\, N}{l} \cdot i$ durch die Grösse H, so ergiebt sich:

$$i^2\, w_2^1\, dt = E\, i\, dt - H \cdot dM$$

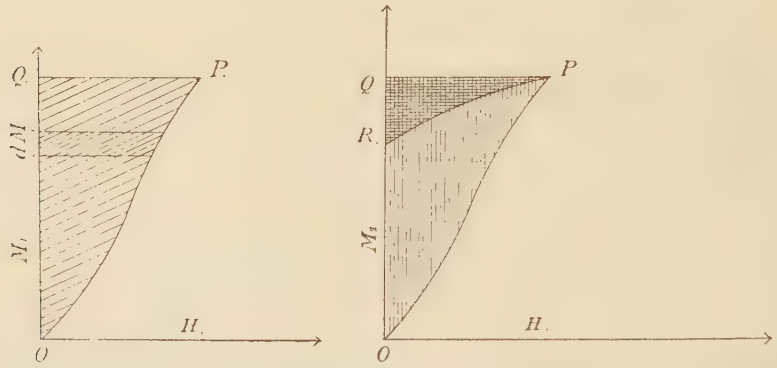
Vorstehende Gleichung zwischen den Zeitgrenzen t = Null und t = t' integrirt, liefert:

$$\int_0^{t'} i^2\, w_2^1\, dt = \int_0^{t'} E\, i\, dt - \int_0^{t'} H\, d\, M$$

oder geordnet:

$$\int_0^{t'} i^2\, w_2^1\, dt + \int_0^{t'} H\, d\, M = \int_0^{t'} E \cdot i\, dt$$

Das Glied: $\int_0^{t'} E \cdot i \, dt$ vorstehender Gleichung stellt den, von den electro-chemischen Prozessen der Batterie herrührenden Aufwand an Energie dar, während das Glied $\int_0^{t'} i^2 w_2^1 \, dt$ den Arbeitswerth der Erwärmung des Leiters, und das Glied $\int_0^{t'} H \cdot d M$ die von dem magnetisirenden Strom bei der Erzeugung der Aenderung des magnetischen Moments geleistete Arbeit bedeutet. Diese Arbeitsmenge wird zur Erzeugung der Magnetisirung des Eisens verbraucht, stellt also eine Energie-Verzehrung dar. Magnetisirt man — siehe nachfolgende Skizze — einen Eisenkörper in Gestalt der Curve O P, so ist die auf dem Wege O P geleistete Arbeit gleich der Fläche O P Q.



Lässt man nach:

2. Fall: die magnetisirende Stromstärke i abnehmen, so ist die electromotorische Gegenkraft e von derselben Richtung, wie die magnetisirende Stromstärke i, sodass die Beziehung resultirt:

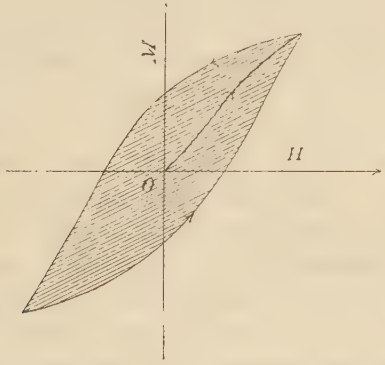
$$i \, w_2^1 = E + e = E + \frac{d M}{dt} \cdot \frac{4\pi N}{l} \quad \text{oder:}$$

$$i^2 \, w_2^1 = E \, i + \frac{d M}{dt} \cdot \frac{4\pi N}{l} \cdot i = E \, i + \frac{d M}{dt} \cdot H$$

Letztere Gleichung mit dt multiplicirt und dann zwischen den Zeitgrenzen $t = t_1$ und $t = t_2$ integrirt, giebt:

$$\int_{t_1}^{t_2} i^2 \, w_2^1 \, dt = \int_{t_1}^{t_2} E \cdot i \, dt + \int_{t_1}^{t_2} H \cdot d M$$

In diesem Falle liefert das Glied $\int_{t_1}^{t_2} H \, d\, M$ einen Arbeits gewinn, indem das magnetisirte Eisen Arbeit abgiebt, weil das magnetische Moment des Eisens abnimmt. Der Arbeitsmenge, die wir bei Abnahme der magnetischen Kraft H bis auf H = Null gewinnen, entspricht nach der Figur des vorhergehenden Blattes die doppelt schraffierte Fläche P Q R. Die bei diesem Prozesse wirklich stattgefundene Energievergeudung ist also gleich der einfach schraffirten Fläche O P R. In diesem Falle ist der Endzustand R des magnetisirten Eisens von dem Anfangszustand O desselben verschieden, weil der mit dem Eisen durchgeführte Magnetisirungsprozess in nicht umkehrbarer Art vorgenommen wurde. Betrachtet man dagegen einen cyklischen Prozess, wo die Endwerthe der Magnetisirung und der magnetisirenden Kraft = den anfänglichen Werthen sind, so kann in diesem am Ende



des Kreisprozesses keine potentielle Energie angesammelt sein. Der ganze Unterschied zwischen der Energie, die während der einen Hälfte des Prozesses verausgabt und jener, die während der andern Hälfte desselben wieder erhalten wird, ist demnach vergeudet worden und dient derselbe zur Erwärmung des Eisens. Die schraffirte Fläche des vorhergehenden Blattes giebt unmittelbar in Arbeitseinheiten des C.-G.-S.-Maasssystems die Energievergeudung (also pro Cubikcentimeter), wenn die Grössen H und $M_{(1)}$ in Einheiten desselben Maassystems, also in Centimeter dargestellt werden.

Die Bestimmung des Exponenten x der Gleichung: $V = y \, . \, M_1^x$ ist wie folgt durchgeführt worden:

Vergleicht man zwei, durch den cyklischen Magnetisirungsprozess erhaltene, die Energieverluste V resp. V^1 darstellende Flächen, bei welchen die Werthe der maximalen Momente pro Cubikcentimeter M_i resp. M_i^1 unmittelbar auf einander folgen, also in engen Grenzen liegen, so ergiebt sich der bezeichnete Exponent x durch Division der resultirenden beiden Gleichungen:

$$V = y \,.\, M_i^x$$
$$V^1 = y \,.\, M_i^{1x}$$

indem man erhält:

$$\frac{V^1}{V} = \left[\frac{M_i^1}{M_i}\right]^x \text{ oder}$$

$$x = \frac{\log : V^1 - \log : V}{\log : M_i^1 - \log : M^1}$$

In dem vorstehenden Ausdrucke für x sind alle Grössen bekannt, da die Werthe von V^1 resp. V durch Ausmessung der entsprechenden Flächen mittelst des Amsler'schen Polarplanimeters und die Werthe von M_i^1 resp. M_i durch Rechnung gefunden wurden.

Das Aequivalent der durch cyklischen Wechsel bedingten Arbeit ist Wärme. Aus diesem Grunde wird die Eisenmasse warm, wenn die Magnetisirung derselben die Richtung wechselt oder irgendwie geändert wird. Ausser der Erwärmung durch Hysteresis erfährt das Eisen noch eine Temperaturerhöhung durch die Wirbelströme, falls dasselbe nicht genügend fein zertheilt und dasselbe schnellen Aenderungen der Feldstärke unterworfen wird. Diese durch Wirbelströme oder Foucault-Ströme entstehende Temperatursteigerung kommt hier nicht in Betracht. Zur Bestimmung der Temperaturerhöhung, welche das Eisen durch eine cyklische Magnetisirung erfährt, ist der Werth des $\int H \,.\, d\,M_i$ in Wärme-Einheiten auszudrücken und durch die Dichte sowie die specifische Wärme des Eisens zu dividiren. Der Arbeitswerth einer Gramm-Kalorie ist 42000000 absolute (C : G : S :) Arbeitseinheiten, die Dichte des in diesem Falle verwendeten Transformator-Eisens beträgt 7,76, während die specifische Wärme des Eisens rund zu 0,11 angenommen werden mag. Demnach ist die

durch einen magnetischen Kreisprozess infolge von Hysteresis erzeugte Temperatur-Erhöhung:

$$\frac{\int H\,d\,M_1}{42000000\,.\,7{,}76\,.\,0{,}11} = 2{,}79\,.\,10^{-8}\int H\,d\,M,$$

Aus der langen Reihe der später in einer vollständigen Tabelle zur Darstellung gelangenden Resultate über die von mir durchgeführten cyklischen Magnetisirungen des Eisen-Ringtransformators werden hier nachstehend zwei Versuche in schwachen magnetischen Feldern und darauf zwei Versuche in starken magnetischen Feldern zur vollständigen Beschreibung gelangen.

Bei den Magnetisirungen in schwachen Feldern war eine oftmalige Durchmagnetisirung des Transformator-Eisens nöthig, ehe der vollständige magnetische Kreisprozess erzielt wurde. Dies rührt daher, dass bei der Magnetisirung des Eisens nach jeder Aenderung der magnetischen Kraft eine gewisse Zeit vergeht, ehe sich der entsprechende magnetische Zustand vollständig hergestellt hat. Diese Erscheinung tritt in schwachen Feldern um so mehr hervor, je geringer die Aenderungen der magnetisirenden Kraft und je grösser das Volumen des magnetisirten Eisens sind. Es findet demnach in schwachen Feldern eine magnetische Verzögerung statt.

In den nachfolgenden zuerst zur Beschreibung gelangenden beiden Versuchen in schwachen Feldern wurden die absoluten Werthe der magnetisirenden Kräfte H in den Grenzen $\pm$ 0,3095 resp. $\pm$ 0,4007 geändert.

Bei diesen beiden Versuchen wurde zwecks Bestimmung der inducirenden Stromstärke i die Constante B der Tangentenbussole wie folgt bestimmt:

$$B = \frac{10.\ H\ [r^2 + a^2]^{3/2}}{2\ \pi\ r^2}\ .\ [1 + \Theta]\ .\ \frac{1}{2\ D}$$

$$B = \frac{10.\ 0{,}173\ [16{,}6^2 + 24{,}0^2]^{3/2}}{2.\ 3{,}14.\ 24^2}\ .\ [1 + 0{,}004013]\ .\ \frac{1}{2900} = 0{,}0041147$$

In dem vorstehenden Ausdrucke ist die Distanz D der Fernrohrscala vom Bussolenspiegel in Millimeter angesetzt worden, da die an der Fernrohrscala gemessene Ablenkung s der Magnetnadel der Bussole ebenfalls in Millimeter zum Ausdruck gelangt.

Das Torsionsverhältniss Θ des Aufhängefadens für den Magneten ergab sich wie folgt:

Einstellung des Magneten	Ablesung	600 mm
Erste Drehung des Befestigungspunktes des Aufhängefadens um den Winkel 360° .	„	527,5 „
Zurückdrehung des Befestigungspunktes des Aufhängefadens um den Winkel 360°		600 „
Zweite Drehung des Befestigungspunktes des Aufhängefadens um den Winkel 360°		673,0
Zurückdrehung desselben um den Winkel 360° . . .		600

Bezeichnet man den Drehungswinkel des Befestigungspunktes des Aufhängefadens für die Magnetnadel mit φ, den Ablenkungswinkel mit α, so ergiebt sich für das Torsionsverhältniss Θ:

$$\Theta = \frac{\alpha}{\varphi - \alpha} = \frac{\alpha}{2\pi - \alpha} = \frac{0{,}0251}{6{,}28 - 0{,}0251} = 0{,}004013$$

indem in Bezug auf den kleinen Winkel α gesetzt wurde:

$$\operatorname{tg} \alpha = \sin \alpha = \alpha = \frac{s}{2\,D} = \frac{72{,}75}{2900} = 0{,}0251.$$

Nunmehr wird die inducirende Stromstärke i in Ampère auf Grund der Gleichung erhalten:

$$i = B \left[s - \frac{s^3}{4\,D^2} + \frac{s^5}{8\,D^4} \right]$$

worin s die Ablenkung in Scalatheilen [Millimeter] bedeutet. Nunmehr wird der absolute Werth der magnetisirenden Kraft H durch Multiplication der Stromstärke i in Ampère mit dem Factor 1,22137 erhalten.

Der absolute Werth des magnetischen Moments pro Cubikcentimeter ist bestimmt durch die Gleichung:

$$M_1 = \frac{P.I \cdot \sin \frac{u}{2}}{4\pi f . N_1 \sin \frac{u^1}{2}} = \frac{P.I}{4\pi f . N_1} \cdot \frac{\frac{1}{4D}\left[s - \frac{11}{32} \cdot \frac{s^3}{D^2} + \frac{421}{2048} \cdot \frac{s^5}{D^4} \right]}{\frac{1}{4D}\left[s_1 - \frac{11}{32} \cdot \frac{s_1^3}{D^2} + \frac{421}{2048} \cdot \frac{s_1^5}{D^4} \right]}$$

In diesem Ausdrucke sind die Grössen P, I, f, N_1 sowie auch für die nachfolgenden zur Darstellung gelangenden Versuchsreihen die Grösse $s_1 - \frac{11}{32} \cdot \frac{s_1^3}{D^2} + \frac{421}{2048} \cdot \frac{s_1^5}{D^4}$ konstant, sodass man schreiben kann: $M_1 = K. \left[s - \frac{11}{32} \cdot \frac{s^3}{D^2} + \frac{421}{2048} \cdot \frac{s^5}{D^4} \right] = K. s^1$,

wobei die Constante K bedeutet:

$$K = \frac{P. I}{4\pi f. N_1 \left[s_1 - \frac{11}{32} \cdot \frac{s_1^3}{4D^2} + \frac{421}{2048} \cdot \frac{s_1^5}{D^4} \right]}$$

Die mit der Tangentenbussole T. B. gemessene Stromstärke I ergab in absoluten Einheiten $0{,}617 . 10^{-1}$, während der Klammerausdruck:

$$\left[s_1 - \frac{11}{32} \cdot \frac{s_1^3}{D^2} + \frac{421}{2048} \cdot \frac{s_1^5}{D^4} \right] = 89{,}92$$

lieferte, sodass für die Constante K resultirte:

$$K = \frac{0{,}477 . 10^8 . 0{,}617 . 10^{-1}}{4 . 3{,}14 . 82 . 720 . 89{,}92} = 0{,}044138$$

Somit wird das magnetische Moment pro Cubikcentimeter M^1 durch Multiplication des constanten Factors 0,044138 mit den verschiedenen Werthen der Grösse s^1 bei diesen ersten beiden Versuchen erhalten.

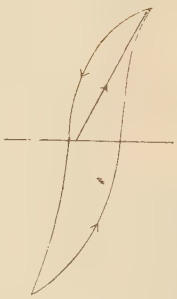
I. Versuch.

H	Ballistischer Ausschlag	Aenderung v. M_1	
+ 0,1095	+ 18,0	0,7945	aufsteigender Ast der Magnetisirungscurve
0,1870	12,8	0,5650	
0,2448	10,0	0,4413	
0,2716	4,0	0,1766	
0,2836	2,0	0,0883	
0,2974	2,2	0,0991	
0,3040	1,3	0,0553	
0,3095	+ 0,8	0,0354	

I. Versuch (Fortsetzung).

H	Ballistischer Ausschlag	Aenderung v. M_i	
0,3040	− 0,5	0,0221	absteigender Ast
0,2974	1,0	0,0441	
0,2836	2,0	0,0883	
0,2716	1,9	0,0838	
0,2448	4,2	0,1854	
0,1870	10,0	0,4413	
+ 0,1095	12,1	0,5341	
− 0,1095	38,8	1,7125	
0,1870	15,0	0,6621	
0,2448	12,0	0,5297	
0,2716	5,0	0,2206	
0,2836	2,0	0,0883	
0,2974	2,2	0,0991	
0,3040	1,0	0,0441	
0,3095	− 0,5	0,0221	
0,3040	+ 0,5	0,0221	aufsteigender Ast
0,2974	1,1	0,0485	
0,2836	2,0	0,0883	
0,2716	1,9	0,0838	
0,2448	4,0	0,1766	
0,1870	10,0	0,4413	
− 0,1095	12,0	0,5297	
+ 0,1095	39,0	1,7214	
0,1870	14,9	0,6577	
0,2448	12,0	0,5297	
0,2716	5,0	0,2206	
0,2836	2,0	0,0883	
0,2974	2,3	0,1015	
0,3040	1,0	0,0441	
0,3095	0,6	0,0264	

der Magnetisirungscurve



II. Versuch.

H	Ballistischer Ausschlag	Aenderung v. M_1	
+ 0,1102	+ 18,8	0,8298	aufsteigender Ast
0,1874	13,0	0,5738	
0,2481	10,3	0,4546	
0,3048	10,0	0,4414	
0,3432	6,8	0,3001	
0,3618	3,1	0,1369	
0,3820	3,3	0,1456	
0,3925	2,0	0,0883	
0,3983	1,0	0,0441	
0,4007	0,5	0,0221	
0,3983	— 0,4	0,0177	absteigender Ast
0,3925	0,9	0,0397	
0,3820	1,9	0,0838	
0,3618	3,0	0,1325	
0,3432	2,9	0,1280	
0,3048	5,8	0,2560	
0,2481	9,0	0,3972	
0,1874	10,0	0,4414	
+ 0,1102	13,1	0,5782	
— 0,1102	42,8	1,8891	
0,1874	15,0	0,6620	
0,2481	12,0	0,5297	
0,3048	11,1	0,4899	
0,3432	8,0	0,3531	
0,3618	3,7	0,1633	
0,3820	4,0	0,1766	
0,3925	2,0	0,0883	
0,3983	0,9	0,0398	
0,4007	0,5	0,0220	
0,3983	+ 0,3	0,0132	aufst. Ast
0,3925	1,0	0,0441	
0,3820	2,0	0,0883	
0,3618	3,0	0,1325	
0,3432	2,8	0,1236	

der Magnetisirungscurve

II. Versuch (Fortsetzung).

H	Ballistischer Ausschlag	Aenderung v. M_1	
0,3048	5,9	0,2604	aufsteigender Ast der Magnetisirungscurve
0,2481	9,0	0,3972	
0,1874	10,1	0,4458	
− 0,1102	13,5	0,5959	
+ 0,1102	42,4	1,8714	
0,1874	15,0	0,6620	
0,2481	12,0	0,5297	
0,3048	11,2	0,4944	
0,3432	8,0	0,3531	
0,3618	3,6	0,1589	
0,3820	4,0	0,1766	
0,3925	2,0	0,0883	
0,3983	1,0	0,0441	
0,4007	0,6	0,0264	

Der absolute Werth V resp. V^1 der Integrale $\int H \cdot d M_1$ wurde beim ersten Versuche zu 0,120 und beim zweiten Versuche zu 0,257 ermittelt, sodass auf Grund nachstehender Gleichung für den gesuchten Exponenten x resultirte:

$$x = \frac{\log V^1 - \log . V}{\log M_1^1 - \log . M_1} = \frac{\log . 0{,}257 - \log . 0{,}120}{\log . 6{,}5059 - \log . 4{,}7801} = \frac{0{,}3307519}{0{,}1338704} = 2{,}47$$

Die Temperatursteigerung, welche das Eisen durch eine cyklische Magnetisirung erfährt, bestimmt sich auf Grund der Gleichung:

$$\tau = 2{,}79 \cdot 10^{-8} \int H \, d \, M_1$$

zu $0{,}335 \cdot 10^{-8}$ Grad beim ersten Versuche und zu $0{,}717 \cdot 10^{-8}$ Grad beim zweiten Versuche.

Die vorstehend dargestellten beiden Magnetisirungsversuche sind für das Verhalten des Eisens in schwachen Feldern characteristisch. Der ansteigende Ast der Magnetisirungscurve bildet nahezu eine gerade Linie, d. h. die magnetische Susceptibilität — das Verhältniss von M_1 zu H — welche durch eine kleine magnetisirende Kraft hervorgerufen wird, ist nicht wesentlich von der

anfänglichen Susceptibilität verschieden, welche das Eisen bei beginnender Magnetisirung hatte. Eine genaue Untersuchung der Werthe für die Susceptibilität hinsichtlich des ansteigenden Astes der Magnetisirungskurve lässt erkennen, dass der Mittelwerth für die Susceptibilität in der zweiten Hälfte denjenigen der ersten Hälfte innerhalb des gezogenen Bereichs übersteigt, was sich aus dem grösseren Ansteigen des bezeichneten Astes in seinem zweiten Theile ersehen lässt. Ferner erkennt man aus dem Verlaufe der bildlich auf Blatt I dargestellten cyklischen Magnetisirungen, dass unter Anwendung von schwachen magnetisirenden Kräften die Remanenz einen verhältnissmässigen kleinen Werth hat. Schliesslich sei noch bemerkt, dass die von mir durchgeführten cyklischen Magnetisirungsversuche in schwachen Feldern das Bestehen einer magnetischen Verzögerung erkennen liessen, indem bei den Magnetisirungen nach jeder Aenderung der magnetischen Kraft eine Zeit verging, ehe sich der entsprechende magnetische Zustand vollständig einstellte, was aus dem verhältnissmässig langsam erfolgenden Ausschlag des ballistischen Galvanometers gefolgert werden muss.

In den nun tabellarisch zur Darstellung gelangenden Magnetisirungsversuchen in starken Feldern wurden die absoluten Werthe der magnetisirenden Kraft H in den Grenzen $\pm$ 11,1172 beziehungsweise $\pm$ 11,6862 geändert. Bei diesen Versuchen wurde behufs Bestimmung der inducirenden Stromstärke i in Ampère die Constante B' der Tangentenbussole wie nachstehend ermittelt:

$$B' = \frac{10H\,[r^2 + a^2]^{3/2}}{2\pi r^2} \cdot [1 + \Theta] \cdot \frac{1}{2D}$$

$$= \frac{10 \cdot 0{,}173\,[24{,}0^2 + 46{,}7^2]^{3/2}}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 24^2} \cdot [1 + 0{,}004013] \cdot \frac{1}{2900}$$

$$B' = 0{,}0239671$$

Dementsprechend wird die inducirte Stromstärke in Ampère auf Grund der Gleichung erhalten:

$$i = B' \left[s - \frac{s^3}{4D^2} + \frac{s^5}{8D^4} \right]$$

in welchem Ausdrucke die Ablenkung s in Millimeter einzusetzen ist.

Aus der, in Ampère gegebenen, inducirenden Stromstärke i wird der absolute Werth der magnetisirenden Kraft H durch Multiplication von i^a mit dem Faktor 1,22137 erhalten.

Der absolute Werth des magnetischen Moments pro Cubikcentimeter M_1 ist bestimmt durch die Gleichung:

$$M_1 = \frac{P.I \quad . \sin \frac{u}{2}}{4\pi \, f. \, N_1 \, . \sin \frac{u^1}{2}} = \frac{P\,I}{4\pi \, f \, N_1} \cdot \frac{\frac{1}{4D}\left[s - \frac{11}{32} \cdot \frac{s^3}{D^2} + \frac{421}{2048} \cdot \frac{s^5}{D^4}\right]}{\frac{1}{4D}\left[s_1 - \frac{11}{32} \cdot \frac{s_1^3}{D^2} + \frac{421}{2048} \cdot \frac{s_1^5}{D^4}\right]}$$

$M_1 = K^1 \, . \, s^{11}$, worin bedeuten: K^1 die constante Grösse:

$$\frac{P.I}{4\pi . f. N_1 \quad s_1 - \frac{11}{32} \cdot \frac{s_1^3}{D^2} + \frac{421}{2048} \cdot \frac{s_1^5}{D^4}} = 0{,}773163$$

und s^{11} die variable Grösse $s - \frac{11}{32} \cdot \frac{s^3}{D^2} + \frac{421}{2048} \cdot \frac{s^5}{D^4}$

Somit wird das magnetische Moment per Cubikcentimeter M_1 durch Multiplication des constanten Factors 0,773163 mit den diversen Werthen der Grösse s^{11} bei den folgenden beiden Versuchen erhalten.

III. Tabelle.

H	Ballistischer Ausschlag	Aenderung v. M_1	
+ 0,6849	+ 6,0	4,6390	aufsteigender Ast der Magnetisirungscurve
1,1334	4,4	3,4019	
1,6758	6,3	4,8709	
2,2218	7,1	5,4895	
2,5567	5,0	3,8658	
3,0148	7,3	5,6441	
3,3110	5,0	3,8658	
3,4958	3,0	2,3195	
3,6855	3,5	2,7061	
3,9106	4,0	3,0926	
4,1365	4,3	3,3246	
4,3985	5,2	4,0205	

1. Fortsetzung für die III. Tabelle.

H	Ballistischer Ausschlag	Aenderung v. M_1	
4,7252	7,0	5,4121	aufsteigender Ast
5,0853	7,8	6,0307	
5,5141	10,0	7,7316	
6,0343	13,0	10,0511	
6,6113	16,2	12,5253	
7,4124	21,0	16,2364	
8,3184	27,0	20,8754	
9,5186	37,3	28,8390	
11,1172	55,49	42,9028	
9,5186	— 12,6	9,7419	absteigender Ast
8,3184	13,0	10,0511	
7,4124	11,5	8,8913	
6,6113	10,8	8,3501	
6,0343	10,5	8,1183	
5,5141	9,8	7,5770	
5,0853	7,8	6,0307	
4,7252	8,2	6,3399	
4,3985	7,1	5,4895	
4,1365	6,1	4,7163	
3,9106	6,0	4,6390	
3,6855	5,8	4,4843	
3,4958	5,0	3,8658	
3,3110	5,0	3,8658	
3,0148	8,4	6,4946	
2,5567	14,5	11,2109	
2,2218	11,0	8,5048	
1,6758	20,0	15,4632	
1,1334	22,4	17,3189	
+ 0,6849	19,9	15,3859	
— 0,6849	80,4	62,1623	
— 1,1334	— 37,6	29,0709	
1,6758	59,88	46,2970	
2,2218	101,68	78,6153	
2,5567	90,42	69,9094	

der Magnetisirungscurve

2. Fortsetzung für die III. Tabelle.

H	Ballistischer Ausschlag	Aenderung v. M_1		
3,0148	138,12	106,7892	absteigender Ast	der Magnetisirungscurve
3,3110	90,42	69,9084		
3,4958	52,29	40,4287		
3,6855	54,39	42,0524		
3,9106	57,98	44,8279		
4,1365	56,09	43,3668		
4,3985	61,98	47,9206		
4,7252	53,49	41,3565		
5,0853	56,79	43,9079		
5,5141	56,99	44,0626		
6,0343	59,48	45,9877		
6,6113	60,68	46,9155		
7,4124	62,98	48,6939		
8,3184	64,67	50,0004		
9,5186	71,96	55,6368		
11,1172	81,95	63,3607		
9,5186	+ 13,0	10,0511	aufsteigender Ast	
8,3184	13,4	10,3604		
7,4124	12,5	9,6645		
6,6113	12,9	9,9738		
6,0343	11,1	8,5822		
5,5141	10,4	8,0408		
5,0853	9,5	7,3451		
4,7252	8,5	6,5719		
4,3985	8,0	6,1853		
4,1365	7,0	5,4121		
3,9106	6,0	4,6390		
3,6855	6,5	5,0256		
3,4958	5,3	4,0977		
3,3110	5,5	4,2524		
3,0148	9,6	7,4224		
2,5567	16,0	12,3706		
2,2218	13,0	10,0511		
1,6758	23,0	17,7828		

3. Fortsetzung für die III. Tabelle.

H	Ballistischer Ausschlag	Aenderung v. M.	
1,1334	26,0	20,1022	aufsteigender Ast der Magnetisirungscurve
— 0,6849	23,5	18,1691	
+ 0,6849	91,7	70,8993	
+ 1,1334	+ 38,9	30,0760	
1,6758	60,58	46,8382	
2,2218	100,39	77,6179	
2,5567	89,92	69,5228	
3,0148	140,50	108,6294	
3,3110	95,90	74,1463	
3,4958	51,49	39,8102	
3,6855	54,79	42,3616	
3,9106	59,28	45,8331	
4,1365	56,69	43,8306	
4,3985	55,19	42,6709	
4,7252	55,59	42,9801	
5,0853	54,69	42,2843	
5,5141	51,99	40,1967	
6,0343	56,19	43,4440	
6,6113	57,68	44,5961	
7,4124	57,98	44,8280	
8,3184	61,98	47,9206	
9,5186	62,98	48,6938	
11,1172	71,96	55,6368	

IV. Tabelle.

+ 0,8964	+ 8,0	6,1853	aufsteigender Ast der Magnetisirungscurve
1,3986	5,5	4,1917	
1,9552	7,0	5,4728	
2,4372	6,9	5,3349	
2,7183	4,2	3,2473	
3,0672	5,8	4,4843	
3,2741	3,5	2,7060	
3,3892	1,9	1,4691	

1. Fortsetzung für die IV. Tabelle.

H	Ballistischer Ausschlag	Aenderung v. M_1	
3,5130	2,0	1,5463	aufsteigender Ast
3,6451	2,3	1,7783	
3,8259	3,0	2,3195	
4,0198	3,3	2,5514	
4,2206	3,4	2,6288	
4,4444	3,9	3,0153	
+ 4,6895	+ 4,8	3,7112	
4,9296	5,2	4,0204	
5,2012	6,0	4,6390	
5,5179	6,6	5,1029	
5,8507	8,0	6,1853	
6,2330	9,2	7,1131	
6,6905	11,6	8,9687	
7,2140	13,8	10,6696	
7,8166	16,8	12,9892	
8,5359	21,8	16,8549	
9,3889	26,5	20,4888	
10,3798	33,2	25,6690	
11,6862	41,7	32,2409	
10,3798	— 10,0	7,7316	absteigender Ast
9,3889	9,1	7,0358	
8,5359	9,2	7,1131	
7,8166	9,0	6,9585	
7,2140	8,4	6,4946	
6,6905	7,8	6,0306	
6,2330	7,5	5,7987	
5,8507	7,0	5,4122	
5,5179	6,5	5,0255	
5,2012	5,8	4,4844	
4,9296	5,6	4,3297	
4,6895	5,2	4,0204	
4,4444	5,2	4,0204	
4,2206	5,1	3,9431	
4,0198	4,5	3,4793	

der Magnetisirungscurve

2. Fortsetzung für die IV. Tabelle.

H	Ballistischer Ausschlag	Aenderung v. M_1	
3,8259	4,6	3,5565	
3,6451	4,0	3,0927	absteigender Ast der Magnetisirungscurve
3,5130	3,3	2,5514	
3,3892	3,0	2,3195	
3,2741	3,0	2,3195	
3,0672	6,0	4,6390	
2,7183	10,2	7,8862	
2,4372	8,9	6,8812	
1,9552	16,8	12,9891	
1,3986	21,5	16,6230	
+ 0,8964	21,5	16,6230	
− 0,8964	107,68	83,2542	
− 1,3986	− 48,00	37,1118	
1,9552	77,55	59,9588	
2,4372	116,83	90,3287	
2,7183	82,15	63,5123	
3,0672	112,08	86,6561	
3,2741	65,97	51,0056	
3,3892	34,20	26,4421	
3,5130	34,00	26,2876	
3,6451	39,20	30,3080	
3,8259	44,80	34,6377	
4,0198	48,80	37,7303	
4,2206	45,00	34,7924	
4,4444	46,20	35,7201	
4,6895	43,00	33,2460	
4,9296	41,00	31,7017	
5,2012	42,50	32,8594	
5,5179	40,00	30,9265	
5,8507	40,00	30,9265	
6,2330	41,00	31,6996	
6,6905	42,40	32,7822	
7,2140	43,00	33,2460	
7,8166	47,00	36,3386	

3. Fortsetzung für die IV. Tabelle.

H	Ballistischer Ausschlag	Aenderung v. M_1	
8,5359	49,99	39,0504	abst. Ast
9,3889	50,49	38,6370	
10,3798	53,99	41,7431	
11,6862	57,98	44,8280	
10,3798	+ 10,00	7,7316	aufsteigender Ast
9,3889	9,80	7,5770	
8,5359	10,00	7,7316	
7,8166	9,5	7,3451	
7,2140	9,1	7,0348	
6,6905	8,4	6,4956	
6,2330	8,0	6,1853	
5,8507	7,5	5,7987	
5,5179	7,0	5,4121	
5,2012	6,8	5,2575	
4,9296	6,3	4,8710	
4,6895	6,0	4,6389	
4,4444	5,9	4,5617	
4,2206	5,8	4,4843	
4,0198	5,5	4,2524	
3,8259	5,2	4,0205	
− 3,6451	+ 4,8	3,7112	
3,5130	3,6	2,7834	
3,3892	3,3	2,5514	
3,2741	3,2	2,4741	
3,0672	6,8	5,2575	
2,7183	12,0	9,2780	
2,4372	10,0	7,7316	
1,9552	19,6	15,1540	
1,3986	25,0	19,3291	
0,8964	25,4	19,6383	
+ 0,8964	120,86	93,4445	
1,3986	48,70	37,6530	
1,9552	77,76	60,1212	
2,4372	115,94	89,6405	

der Magnetisirungscurve

4. Fortsetzung für die IV. Tabelle.

H	Ballistischer Ausschlag	Aenderung v. M_1	
2,7183	81,95	63,3607	aufsteigender Ast der Magnetisirungscurve
3,0672	109,86	84,9397	
3,2741	67,07	51,8561	
3,3892	33,90	26,2102	
3,5130	32,90	25,4370	
3,6451	39,10	30,2307	
3,8259	44,80	34,6377	
4,0198	47,80	36,9572	
4,2206	45,00	34,7913	
4,4444	43,80	33,8656	
4,6895	40,80	31,5450	
4,9296	38,50	29,7668	
5,2012	40,40	31,2358	
5,5179	37,50	28,9936	
5,8507	38,40	29,6893	
6,2330	37,70	29,1482	
6,6905	41,30	31,9316	
7,2140	40,50	31,3131	
7,8166	42,30	32,7048	
8,5359	45,80	35,4109	
9,3889	48,90	37,8077	
10,3798	50,00	38,6581	
11,6862	56,30	43,5291	

In den vorstehenden tabellarisch dargestellten cyklischen Magnetisirungen in starken Feldern wurde der absolute Werth V resp. V^1 der Integrale $\int H \,.\, dM_1$ zu 7615 resp. 7870 Einheiten ermittelt, sodass auf Grund der nachfolgenden Gleichung für den Exponenten x sich ergab:

$$x = \frac{\log: V^1 - \log: V}{\log: M_1^1 - \log: M_1} = \frac{\log: 7870 - \log: 7615}{\log: 1316{,}6386 - \log: 1288{,}3640} = 1{,}52$$

Die Temperatursteigerung, die das Eisen durch die cyklische Magnetisirung erfährt, bestimmt sich gemäss der Gleichung:

$$\tau = 2{,}79 \cdot 10^{-8} \int H \cdot dM_i$$

zu 0,0002155° bei dem durch Tabelle III und zu 0,0002231° bei dem durch Tabelle IV dargestellten Versuche.

Die ebenfalls auf Blatt I bildlich dargestellten beiden cyklischen Magnetisirungsversuche zeigen das Verhalten des Eisens in starken magnetischen Feldern. Der ansteigende Ast der Curven des cyklischen Magnetisirungsprozesses kann im Grossen und Ganzen in folgende Theile zerlegt werden. Zuerst unter Anwendung schwacher magnetisirender Kräfte ist die Ordinate dieser Curve klein, d. h. die magnetische Susceptibilität ist an dieser Stelle gering, später, wenn die Kraft wächst, wird die Curve steil und fast geradlinig: es ist dies der Beginn der grossen Susceptibilität. Würden noch grössere Kräfte als in den bildlich dargestellten Versuchen zur Anwendung gelangt sein, so würde diese Curve umbiegen und das Ansteigen würde wieder gering, sodass die Susceptibilität wieder abnimmt. Dieser letzte Theil des ansteigenden Astes hängt zusammen mit der magnetischen Sättigung des Eisens. Bei dem absteigenden Aste der Curve ist ersichtlich, in wie verhältnissmässig geringem Grade der Magnetismus verschwindet, wenn die magnetisirende Kraft H vermindert wird. Selbst wenn die magnetisirende Kraft H auf Null herabsinkt, beträgt der remanente Magnetismus noch circa 70 Procent seines maximalen Werthes. Dieser remanente Magnetismus wird jedoch nur schwach festgehalten, denn kehrt man die Richtung der magnetisirenden Kraft H um, so nimmt er schnell ab und eine Kraft von circa — 3,3 C. G. S. Einheiten zerstört ihn vollständig. Wie aus den beiden Figuren der cyklischen Magnetisirung des Eisens ersichtlich ist, besass das Eisen bei beginnender Magnetisirung in starken Feldern bereits einen erheblichen Magnetismus, der circa 62 Procent von dem Werthe des maximalen Magnetismus betrug. In der nachfolgenden Tabelle V sind die Resultate aller durchgeführten cyklischen Magnetisirungen des «Ringtransformator-Eisens» zusammengestellt.

Tabelle V.

H	M_1	K	V	x
0,3095	4,7801	15,44	0,120	2,47
0,4007	6,5059	16,24	0,257	
0,9243	17,2834	19,24	5,52	2,17
1,1626	27,7797	23,89	15,43	
1,3960	50,0068	35,82	29,35	2,16
1,6622	78,1337	47,01	76,81	2,06
2,0468	123,5062	60,34	197,24	
2,6038	237,7948	91,33	504,5	1,94
3,1091	356,6727	114,69	1107,7	
3,3901	421,0642	124,19	1282,0	1,72
4,7250	646,7972	136,89	2685,0	
5,2250	720,2930	137,85	3095,0	1,68
5,7490	798,3960	138,85	3681,0	
6,9501	950,3564	136,73	4768,0	1,67
7,5151	1007,8141	134,10	5262,0	1,63
8,0774	1081,9256	133,99	5908,0	1,66
8,9580	1164,8976	130,03	6683,0	1,46
10,0012	1238,6120	123,83	7195,0	1,44
11,1172	1288,3640	115,89	7615,0	
11,6862	1316,6386	112,67	7870,0	1,33
12,9101	1355,7063	105,01	8162,0	
13,2797	1361,1741	102,49	8194,0	1,34
14,0630	1382,0605	98,29	8304,0	1,36
16,6760	1434,8198	85,70	8809,0	1,22
18,3635	1449,7071	78,94	8926,0	
21,6333	1500,5357	69,36	9349,0	1,22
25,4402	1538,5325	60,48	9645,0	
27,7885	1567,1104	56,39	9817,0	
30,5100	1576,3120	51,66	9698,0	
33,0211	1588,7410	48,11	9575,0	
37,0030	1591,6175	43,01	9320,0	

In vorstehender Tabelle bedeuten: H und M_1 die absoluten Grenzwerthe der magnetisirenden Kraft resp. des magnetischen

Moments pro Volumeneinheit, $k = \frac{M_1}{H}$ das Verhältniss jener Grenzwerthe, V die während eines Kreisprozesses verbrauchte Energie in absoluten Einheiten und x den Exponenten der Gleichung: $V = y \cdot M_1^x$.

Die Tabelle V findet ihren graphischen Ausdruck auf Blatt II. Die Curve des magnetischen Moments pro Volumeneinheit M_1 besteht, wie aus der Figur 1 auf Blatt II ersichtlich ist, im wesentlichen aus 4 Theilen. Sie beginnt langsam ansteigend mit dem Theile zwischen den magnetischen Kräften $H = 0{,}3095$ und $H = 2{,}8$; dieser Theil der Curve kehrt seine convexe Seite der Abscissenaxe H zu. Hieran reiht sich ein annähernd geradliniges Stück der Curve bis zur Kraft $H = 6{,}2$. Von dieser Stelle an ist die Curve nicht mehr geradlinig, sie ist weniger steil als vorher und kehrt gleichzeitig ihre concave Seite der Abscissenaxe H zu. Im vierten Theil der Curve, etwa bei einer magnetisirenden Kraft $H = 16{,}3$ beginnend, geht die Curve in eine schwach ansteigende, annähernd gerade Linie über. Die graphische Darstellung zeigt, dass die Magnetisirung anfangs schneller als die magnetisirende Kraft H wächst, darauf der magnetisirenden Kraft nahezu proportional ist, und mit weiter zunehmender magnetisirender Kraft nur noch langsam steigt, ohne jedoch einen bestimmten Grenzwerth zu erlangen. Dieser Grenz- oder Sättigungswerth konnte nicht mit der, von mir angewendeten ballistischen Untersuchungsmethode erzielt werden, weil die unter Anwendung starker magnetisirender Kräfte eintretende starke Erwärmung der inducirenden Stromwindungen des Transformators der Isolation seiner einzelnen Theile schädlich geworden wäre.

Der complicirte Character der Magnetisirungscurve macht es schwierig, den Zusammenhang zwischen der magnetisirenden Kraft H und dem Momente der Volumeneinheit M_1 analytisch darzustellen. Dieser Zusammenhang kann nur in complicirter Form durch die Exponentialgleichung:

$$M_1 = Ae^{aH} + Be^{bH} + Ce^{cH}$$

zum Ausdrucke gelangen, in welcher Gleichung A, B, und C, sowie a, b, und c constante Grössen und e die Basis des natürlichen Logarithmensystems bedeuten. Einen practischen Werth hat vorstehende Formel ihres complicirten Characters wegen nicht.

Beschränkt man sich nur auf mittlere Werthe der magnetisirenden Kraft H, schliesst also ganz grosse und kleine Kräfte von H aus, so kann die Lamont'sche Formel:

$$M_1 = \frac{H}{a + b\,H}$$

Anwendung finden, in welchem Ausdrucke a und b constante Grössen sind, die eben so, wie jene in der obigen Gleichung von der physikalischen und chemischen Beschaffenheit des Eisens abhängig sind. Für das zur Untersuchung gelangte Transformator-Eisen würde die Lamont'sche Formel in dem Intervall H = 5 bis H = 14 volle Gültigkeit haben.

In Figur 1 des Blattes II sind noch die Werthe von der Susceptibilität k als Function von H aufgetragen. Die Curve der Susceptibilität k ist von Beginn an, bis zu einer Kraft H = circa 1,0 mit grosser Annäherung eine gerade Linie. Verlängert man diesen ersten Curventheil nach rückwärts bis zum Schnitte mit der Ordinatenaxe, so erhält man für die magnetisirende Kraft H = o den Werth k = 13,5. Dies ist also die Grösse der Susceptibilität k für unendlich kleine Kräfte des verwandten Eisens. Die Grösse $k = \frac{M_1}{H}$ kann allgemein für schwache Kräfte durch die Formel:

$$k = a + b\,H^2$$

dargestellt werden, da die Beziehung des magnetischen Moments der Volumeneinheit M_1 zur magnetisirenden Kraft H in diesem Bereiche durch die Formel:

$$M_1 = a\,H + b\,H^3$$

gegeben ist, in welchen Ausdrücken unter a und b constante Grössen zu verstehen sind. Im vorstehenden Ausdrucke für M_1 können nur ungerade Potenzen von H auftreten, da die Grösse M_1 sowohl einen positiven als negativen Werth annehmen kann. Im weiteren Verlaufe biegt die k-Curve kurz um, ihre convexe Seite der Abscissenaxe H zukehrend, worauf sie unter steiler Ansteigung annähernd die Form einer Geraden annimmt. Bei einer Kraft H = 3,0 nimmt die k-Curve eine, von der geraden Linie abweichende Form an, indem sie weniger steil wird und

gleichzeitig ihre concave Seite der Abscissenaxe H zukehrt. Bei einer Kraft H = 5,5 erreicht die Susceptibilität k ihren maximalen Werth circa 139. Weiterhin fällt die Curve der Susceptibilität k beständig, jedoch immer ihre concave Seite der Abscissenaxe zukehrend bis zu einer Kraft H = 14,5, wo eine Wendestelle in der k-Curve eintritt, indem dieselbe bei weiterem Abfall nunmehr wieder, wie anfangs, ihre convexe Seite der Abscissenaxe H zuwendet. In unserem Falle fällt k bis auf den Werth 43,01 bei einer Kraft H = 37,00; eine einfache Fortsetzung der k-Curve bis zu ihrem Schnitte mit der H-Axe darf nicht stattfinden, weil die k-Curve, wie bereits vorher bemerkt, in dem Bereiche der starken magnetisirenden Kräfte einen Wendepunkt hat.

Die als Function von der magnetisirenden Kraft H aufgetragenen Werthe des Energieverlustes V geben eine Curve, die in ihren anfänglichen und mittleren Stadien einen ähnlichen Verlauf wie die Curve des magnetischen Moments der Volumeneinheit M_1 zeigt, nur erkennt man leicht, dass der Energieverlust V verhältnismässig viel schneller wächst als die Stärke der Magnetisirung. Die Curve des Energieverlustes V steigt anfangs langsam an, ihre convexe Seite der Abscissenaxe H zukehrend. Von einer Kraft H = 2,2 bis zur Kraft H = 8,0 steigt die V-Curve steil an, und zwar proportional der Abscissenänderung. Von der Kraft H = 8,0 an, nimmt die V-Curve einen weniger steilen Verlauf, dabei ihre concave Seite der Abscissenaxe H zuwendend. V erreicht hierbei bei einer Kraft H = 27,7 ein Maximum, von welcher letzteren Stelle an, ein leichter Abfall der Curve des Energieverlustes V nach der Abscissenaxe H zu, festzustellen ist. Ein rapider Abfall der Curve des Energieverlustes V in ihrem letzten Theile, wie ihn Mr. F. G. Baily in seiner «Note on the Hysteresis of Iron and Steel» — Zeitschrift «The Electrican» vom 31. August 1894 — beschreibt, hat hier nicht constatirt werden können.

Die gleichfalls als Function der magnetisirenden Kraft H aufgetragenen Werthe des Exponenten x der Beziehung $V = y \cdot M_1^x$ sind nicht — wie von Steinmetz angegeben wird — von der Grösse H resp. M_1 unabhängig. In unserem Falle bewegt sich der Werth des Exponenten x zwischen den Grenzen x = 2,47 und x = 1,22.

Will man unter Zugrundelegung der Steinmetz'schen Formel, die lautet:

$$V = y \cdot M_1^{1,6}$$

den Energieverlust V bestimmen, so muss man die Magnetisirung durch kleinere und grössere Kräfte ausschliessen. In unserem Falle würde die Steinmetz'sche Formel bei einer Kraft H circa 8,0 annähernd mit den Thatsachen übereinstimmen.

Im Allgemeinen müsste der Exponent x der Formel: $V = y \cdot M_1^x$ die Form:

$$x = \frac{a}{1 + b\,H + c\,H^2}$$

erhalten, in welchem Ausdruck a, b und c von der Natur des Materials abhängige, constante Grössen bedeuten.

Wie aus der Figur 2 des Blattes II ersichtlich ist, zeigt die x-Curve von Beginn an zunächst einen nach der Abscissenaxe H zu etwas steil abfallenden Verlauf. Bei einer Kraft H circa 3,2 wird der Verlauf der x-Curve weniger steil, indem sie an dieser Stelle umbiegt und ihre schwache Neigung gegen die Abscissenaxe H nahezu unverändert bis zur grössten, hier in Betracht kommenden, magnetisirenden Kraft H = 27,7885 — bei welcher das Maximum des durch Hysteresis bedingten Energieverlustes V erreicht wird — beibehält. Ueber die Kraft H = 27,7885 hinaus können die Werthe des Energieverlustes V zur Bestimmung des Exponenten x nicht Verwendung finden, da für diese infolge der Abnahme von V negative Werthe für den Exponenten x resultiren würden.

Zum Schlusse bemerke ich noch, dass von mir auch untersucht worden ist, in welcher Weise der durch Hysteresis bedingte *Arbeitsaufwand von der Geschwindigkeit* abhängig ist, mit welcher die cyklische Magnetisirung durchgeführt wird. Ich fand:

bei H $\pm$ 1,6622 V zu 76,81 bei einer Zeitdauer t = 47'30" des Cyklus
» H $\pm$ 1,6473 V » 78,01 » » » t = 29'50" » »
» H $\pm$ 2,0408 V »197,24 » » » t = 59'55" » »
» H $\pm$ 1,9904 V »201,25 » » » t = 40'10" » »

Es nimmt also der durch die Hysteresis bedingte *Arbeitsverbrauch mit zunehmender Geschwindigkeit der cyklischen Magnetisirung zu.*

Berichtigungen.

a) Seite 12: Gleich:

$$j' w_1{}^1 + Q \frac{dj'}{dt} - P \frac{di'}{dt} = 0$$

muss heissen:

$$j' w_1{}^1 + Q \frac{dj'}{dt} + P \frac{di'}{dt} = 0$$

b) Seite 26: Gleich:

$$\frac{P.\ I}{4\pi.\ f.\ N_1 \left[s_1 - \frac{11}{32} \cdot \frac{s_1{}^3}{D^2} + \frac{421}{2048} \cdot \frac{s_1{}^5}{D^4} \right]} = 0{,}773163$$

fehlt im Nenner des Bruches die Klammer.